Uit: Verslag van de Gewone vergadering der Wis- en Natuurkundige Afdeeling ***49*** *(1940), 24-26.*

KONINKLIJKE NEDERLANDSCHE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN

Over de tien eenvoudigste meetkundige grootheden

DOOR

J. A. SCHOUTEN

Wiskunde. — J. A. SCHOUTEN: *Over de tien eenvoudigste meetkundige grootheden.*

Men kan een meetkundige grootheid definieeren als een figuur, die ten opzichte van eenig rechtlijnig coördinatenstelsel is vastgelegd door een aantal getallen, de kentallen van de grootheid. Transformeert men het coördinatenstelsel, dan transformeeren zich deze kentallen en het is juist aan deze transformatiewijze der kentallen, dat men verschillende soorten van meetkundige grootheden van elkaar onderscheidt. Laat men in de keuze der rechtlijnige coördinatenstelsels een zoo groot mogelijke vrijheid toe, d.w.z. laat men ook scheefhoekige coördinatenstelsels toe met op elke as een willekeurige maateenheid, dan is er een groep van tien verschillende grootheden, wier transformatievergelijkingen eenvoudiger zijn dan die van alle anderen en die men dus als de „eenvoudigste" meetkundige grootheden mag beschouwen. In de eerste plaats heeft men een co- en een contravarianten vector, dan een co- en een contravarianten bivector en ten slotte een co- en een contravarianten trivector, welke beide laatsten echter met één en dezelfde figuur correspondeeren. Het meetkundige beeld van al deze grootheden bevat steeds een pijl, die òf in de figuur ligt òf er buiten (er doorheen of er omheen). Vervangt men nu een pijl in de figuur door een pijl er buiten of omgekeerd, dan ontstaan nog vijf geometrische grootheden, de zoogenaamde Weylsche grootheden, zoodat er in het geheel van deze eenvoudigste grootheden juist tien zijn. Aan de hand van eenige modellen wordt dit nader toegelicht.

Beperkt men de keuze der coördinatenstelsels, dan laten zich verschillende dezer grootheden door één en dezelfde figuur voorstellen, zoodat het aantal schijnbaar minder wordt. Het sterkst treedt dit verschijnsel op indien men zich vastlegt op gewone rechthoekige rechtsche coördinatenstelsels met op elke as dezelfde gewone maat. Dan laten zich alle acht vectoren en bivectoren voorstellen door één figuur (een pijl) terwijl de twee trivectoren zich door één enkel invariant (d.i. zich niet transformeerend) getal laten vastleggen. Dit geeft eenerzijds vereenvoudiging, daar men nu maar met twee soorten grootheden te maken heeft, „gewone" vectoren (pijlen) en getallen. Anderzijds leidt deze zeer simplistische beschrijvingswijze dikwijls tot een meer gecompliceerd meetkundig beeld.

Een sprekend voorbeeld levert de strooming van een vloeistof. De stroomdichtheid is in wezen een covariante Weylsche bivector en heeft als meetkundig beeld een buis met een door een pijl langs de buis aangegeven zin. De continuïteitsvergelijking voor een onsamendrukbare vloeistof bij een stationairen toestand beteekent meetkundig eenvoudig dat alle buizen precies aan elkaar passen en samen de ruimte vullen. Dit mooie eenvoudige beeld gaat verloren, indien men de buizen door pijlen vervangt. De verkregen fijnere onderscheiding kan er dus eenerzijds toe leiden, dat de physicus (juist bij behoud van gewone rechthoekige coördinatenstelsels) weet, dat er behalve de pijl nog zeven andere meetkundige voorstellingen voor een „vector" bestaan en dat het volstrekt niet noodig is een physische grootheid, die zich nu juist van nature op een van die zeven andere wijzen presenteert, toch maar weer, als het ware tegen de natuur in, door een pijl voor te stellen. Anderzijds leveren zij den physicus het instrument voor die gevallen, waar geen gewone metriek bestaat en dus van gewone rechthoekige coördinatenstelsels geen gebruik kan worden gemaakt. Uit onderzoekingen van VAN DANTZIG is gebleken dat vele betrekkingen in de electriciteitsleer, de hydrodynamica en de thermodynamica, in werkelijkheid geheel onafhankelijk zijn van de metriek en dus ook een van de metriek onafhankelijke formuleering toelaten. Het zijn juist deze onderzoekingen, die aanleiding gaven tot deze hernieuwde klassificeering der meetkundige grootheden, die ook voor een dimensiegetal grooter dan drie werd doorgevoerd [1], maar waarvan hier slechts iets over de eenvoudigste resultaten voor de gewone ruimte werd medegedeeld.

[1]) J. A. SCHOUTEN, Ueber die geometrische Deutung von gewöhnlichen p-Vektoren und W-p-Vektoren und den korrespondierenden Dichten. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **41**, 709—716 (1939); Ueber die Beziehungen zwischen den geometrischen Grössen in einer X_n und in einer in X_n eingebetteten X_m, aldaar 568—575; J. A. SCHOUTEN and D. VAN DANTZIG, On ordinary quantities and W-quantities, Comp. Math. **7**, 447—473 (1940).